

# 有限元素法應用於橢圓球體之振動分析

程安邦

國立宜蘭技術學院農業機械工程系

## 摘要

本文以 ANSYS 有限元素分析軟體對具軸對稱之橢圓球體，包括實心體與中空體，進行彎曲模組之振動分析。由於橢圓球體為橢圓截面繞其長軸旋轉而得，因此可以預測在短軸上將有重複模組出現。本文探討長短軸比例改變對模組出現的順序、自然頻率分佈等之影響，同時也將中空橢圓球體的模組與實心體相比較，歸納出其間的關係。模擬的結果顯示實心體的基本振形為長軸上的自由樑第一彎曲振形，中空體的基本振形為短軸截面上相對曲面的反相位壓擠振形。就自然頻率的分布而言，中空體的基本模組對厚度或質量比的變化最為敏感，而實心體的基本模組對長短軸比的變化最為敏感。由於實心體與中空體的模組順序與頻率間的差別很明顯，因此本文研究的結果將有助於預測與分辨二者的振動行為。

**關鍵詞：**有限元素法、振動模組、橢圓球體

# Vibration Analysis of Ellipsoids Using Finite Element Method

**An-Pan Cherng**

Department of Agricultural Machinery Engineering

National Ilan Institute of Technology

## **Abstract**

This article presents a series of finite element analysis on the vibration of ellipsoids with various geometric configurations, such as axis ratio and solid/hollow volumes. An ellipsoid of revolution, abbreviated as an ellipsoid in this paper, is an ellipse revolving with respect to its long axis. Due to this axi-symmetric geometry, there exist repeated modes on the circular cross section where the short axes reside. The simulation results of this research show that the fundamental mode shape of a solid ellipsoid resembles the first bending mode of a free-free string or beam, while that of a hollow ellipsoid behaves as a squeezing mode along the short axis. When considering the distributions of natural frequencies, it is found that the fundamental mode of the hollow ellipsoid exhibits high sensitivity to the thickness of the body, and that of the solid ellipsoid to the axis ratio. In conclusion, the order of appearance and the sensitivity of frequency distributions are quite different between the two sets of ellipsoids. Methods of distinguishing solid ellipsoids from hollow ones using vibration modes may be further proposed based on the results of this work.

**Key Words:** finite element method, vibration modes, ellipsoid of revolution

## 一、前言

軸對稱體為工程問題中常見的結構形狀。以圓球體為例，由於圓球體對稱於空間中任意通過球心的軸線，因此在許多工程問題上皆將其模型簡化為二維或使用部份模型（如 1/4 模型），以達到快速求解的目的。以振動分析而言，若該圓球體具備線性、彈性、均質、等向性（即 Linear, Elastic, Homogeneous, Isotropic, 簡稱為 LEHI）等性質，則以理論求解將得到三維的重複模組（repeated modes）。由於重複模組的特徵向量（eigenvector）為該特徵空間（eigenspace）任意線性獨立向量的組合，因此在三維上各會出現相同的振形與頻率。就物理意義而言，重複模組的出現表示該特徵空間內節點（node）的位置不固定，因此對球體內相應的特徵空間任一點激振皆將引起該模組的振動。此類模組的好處是有許多致動器與感測器的位置可供選擇，然而也因此容易引進外界的干擾訊號，故缺點是不易達成振動控制的目的。

振動模組概可分為彎曲模組（bending mode 或 flexural mode）與扭轉模組（torsional mode）。由於單軸加速規或位移感測器僅能測得沿球體表面法線方向的變化，因此一般多以彎曲模組為研究與討論的對象。在這個前提下，球體可以簡化為二維的實心圓，而實心圓的彎曲模組可以由外形的變化觀察，因此又可將之簡化為圓形的環（ring）；而環可以進一步視為兩端固定且繞成圓形的索（string）或樑（beam）。有關以索或樑理論推導出環的振形早有文獻證明〔1〕，也很容易由電腦模擬來驗證。基本上環的振形為極座標中徑量  $r$  在圓周上的正弦函數，即：

$$r = 1 + a \cos(s\theta); 0 \leq \theta \leq 2\pi, s = 0, 1, 2, 3, \dots$$

其中  $a$  為參考用的振幅係數。典型的環振形如圖 1 所示，由該圖可以看出節點的數目為振形指標  $s$  的雙倍數，這也說明了二維軸對稱結構的特性。圖 1 中值得注意的是當  $s=0$  時，節點數為 0，因此整個圓周同時向外擴張，此模組有時也稱為 breathing mode 或 extending mode。另外，當  $s=1$  時，節點數為 2，振形看似為移動的剛體模組，而移動的部份為同相位（in phase）；事實上此模組移動的部份亦可為反相位（out of phase），但節點位置不動。除了振形的規律出現外，各相關自然頻率之間也有一定的比例關係。不僅如此，薄殼圓球體的彎曲振動模組也可以由上述的基本振形加以擴展而得。

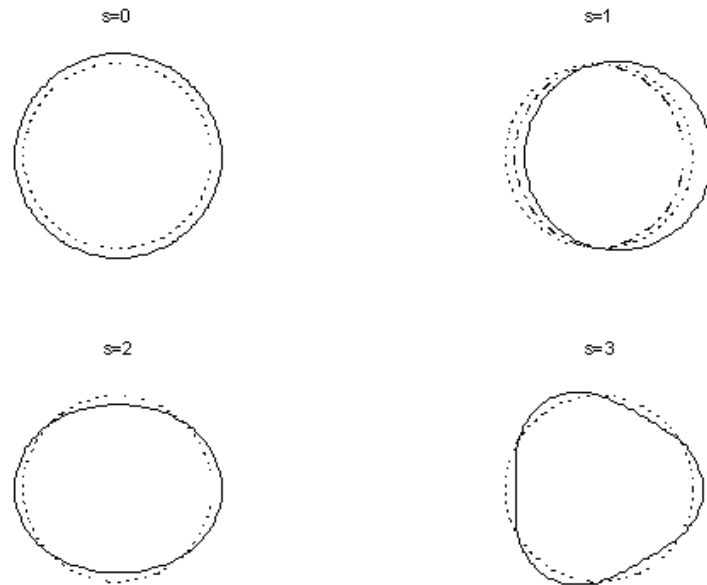


圖 1 圓環的四個理論振形，其中虛線為原始輪廓，實線為振形，節點數為模組數  $s$  之雙倍數。注意  $s=1$  時有兩個振形，實線表示  $y$  軸兩側為同相位移；點實線為反相移動。

除了前述的圓球體外，橢圓形狀的球體也是另一個常見的軸對稱體。一個橢圓形繞著其長軸旋轉而成的球體稱為橢圓旋轉體 (ellipsoid of revolution)，是屬於橢圓球體 (ellipsoid) 的一種，在本文中簡稱為橢圓球體。其三個主軸除了互相垂直外，長軸與短軸所組成的平面為橢圓形，而兩個相等的短軸所組成的截面則為圓形，橢圓球體也會在此截面上出現二維重複模組。然而與圓球體相較，有關橢圓球體的研究分析較不常見於文獻中。由於長短軸的比例會影響模組的重新分佈，如何預測這些影響範圍，以及如何據以修正一些簡化的理論模型成為重要的工作，因此有研究的必要性。

就應用性而言，除了日常生活所見的圓球或橢圓球形狀的工商產品，也有許多農產品具備上述的軸對稱形狀。例如蘋果、梨、葡萄等為圓球體，而西瓜、洋香瓜、蛋類則為橢圓球體。自 1960 年代末期有學者〔2〕開始嘗試利用振動或聲波技術判斷蔬果的品質以後，由於其可歸類為非破壞性檢測方法，因此有許多研究者提出不同方式將蔬果激振、擷取其後的振動或聲波訊號、以及分析方式等，許多研究報告也證實振動方式所得的結果與破壞性的穿透試驗或壓縮試驗結果有相當的關聯性。就研究對象來說，學者多以蘋果、梨、桃、葡萄、瓜類等為主，所採用的模型也是圓球體〔3-6〕。然而就外形而言，瓜類多屬於橢圓球體，但如前所述，目前仍缺乏對橢圓球體之分析。程〔7〕曾以實驗模態分析 (Experimental Modal Analysis) 方法對實心的西瓜與中空的洋香瓜進行振動量測，發現長短軸上的振形出現順序不同，因此有進一步以電腦模擬與驗證的必要。

本文擬就橢圓球體進行有限元素分析，對象包括實心體與中空體，希望能觀察到模組出現的順序與長短軸比例、質量等的關係，同時希望能藉此歸納出一些法則以供研究橢圓球體振動特性之參考。另一方面，研究的結果也可提供分辨實心體與中空體內部是否有裂縫（crack）生成的學理基礎，以便未來進一步發展線上檢測蔬果品質技術的判斷準則。

## 二、有限元素分析步驟

本研究中橢圓球體的材料為單一材質且具備前節所述 LEHI 等性質。雖然彈性模數、波以松比、密度等材料常數會改變頻率的相對比例，但由於採用單一材質，模組出現的順序與振形是相同的。本文的主要目的在探討幾何性質對模組分佈的影響，這些因素包括長短軸比例以及中空體厚度等。為了便於分析，本文以長短軸比例為 2:1 的實心橢圓球體為基準參考模型，其中長軸長度  $b=100\text{cm}$ ，短軸長度  $a=50\text{cm}$ ，材料採用不銹鋼材質，其材料常數列於表一。

表 1 有限元素法模擬的不銹鋼材料與幾何性質。

彈性模數 ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	剪力模數 ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	波以松比	密度 ( $\text{kg}/\text{mm}^3$ )	長軸初值 (m)	短軸初值 (m)
1.9e11	7.19e10	0.29	7.92e3	1.0	0.5

$V' = \frac{4}{3}\pi a^2 b' = \frac{8}{3}\pi a^3$  分析的第一步是探討長短軸比例對模組分佈的影響程度，此時假設橢圓球體為實心體。為了便於分析與比較，不同長短軸比例的實心體皆維持相同體積（與質量），這樣可以去除質量的影響。將長短軸的比例  $r$  分別定為  $r=1.2、1.4、1.6、1.8、2.0$ （即原參考模型）等 5 種比例，同時令長短軸比為 2 的參考模型長短軸分別為  $b'$ （ $=100\text{cm}$ ）及  $a'$ （ $=50\text{cm}$ ），則  $b'=2a'$ ，橢圓球體的體積為(1)

$a = \left(\frac{2}{r}\right)^{1/3} a'$  當長短軸比例變更為  $b=ra$  但仍擁有相等體積時，代入式(1)可以求出短軸長度為(2)

也就是對已設定的  $r$  值，長短軸長度在滿足式 (2) 時，體積（與質量）可以維持固定不變。接著針對上述各項長短軸比例但為中空的橢圓體進行模擬。

中空體厚度  $t$  也依長短軸長度之比例分別設定為：（長軸及短軸的）0.2、0.4、0.6、0.8、1.0（此時為實心體）等倍數，如圖 2 所示。

例如若在短軸上  $t=0.2a$ ，則在長軸上  $t=0.2b=0.2ra$ 。此時的中空體體積為

$$V'' = \frac{4}{3}\pi \left[ a^2 b - (a-t)^2 (b-rt) \right] = \frac{4}{3}\pi a^3 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{t}{a}\right)^3 \right\}$$

(3)與實心體的體積比例（亦為質量比例）則為  $\frac{V''}{V'} = 1 - \left(1 - \frac{t}{a}\right)^3$

(4)也就是體積的改變僅與厚度和長短軸長度之比例有關。這樣的安排可以使同一相對厚度但不同長短軸比例的橢圓體仍舊保持相同體積與質量，也利於對照分析。另外為便於本文爾後之敘述，將以  $t=1/5, 2/5 \dots$  等代表前述之厚度比例。

本文以有限元素軟體 ANSYS 5.3 版〔8〕為分析工具，實心體與中空體皆採用 solid72 (3D 4-node tetrahedral element) 元素，長軸設定在 x-軸上，短軸在 yz 平面上 (x=0)，質心在原點。邊界條件設為自由振動 (即 no constraints)，並使用全模型方式 (full model) 進行求解。求解時採用 subspace method，每一次取 30 個模組，其中前 6 個為三維的移動與轉動剛體運動模組，因此本文所討論的振動模組自第 7 模組開始。由於彎曲模組為本文分析重點，因此僅記錄每次模擬結果 (30 個模組) 中的前三個彎曲模組，總共產生 25 套 (5 個質量比及 5 個長短軸比) 的資料樣本 (每一套有 3 個彎曲模組) 以供分析之用。另外，雖然有重複模組的出現，但因全模型的有限元素分割並非完全對稱，因此雖然振形相同 (方向不同)，頻率仍有少許誤差，此時採其平均值加以記錄。振形的命名則依第一節所述以  $s_0, s_1, s_2 \dots$  等方式稱之，分別代表  $s=0, s=1, s=2 \dots$ 。

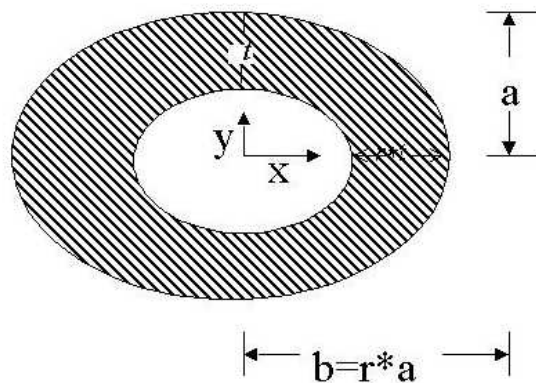


圖 2 中空橢圓形示意圖，其中常數  $r$  為長短軸比，橢圓球體則由其繞長軸而得。注意厚度  $t$  亦按長短軸比例而定，這樣可以維持挖空部份的橢圓形與原實心橢圓之  $r$  值相等而利於比較。

### 三、結果與討論

本節將前節的模擬結果分為振形、自然頻率分佈、模組出現順序、以及綜合分析等四大項來討論，其中自然頻率與模組出現順序的資料列於表二。由於本文並未討論任何扭轉模組之內容，因此表二僅列出彎曲模組的資料。

(一) 振形之分析

前三個彎曲模組的振形分別示於圖 3、圖 4、與圖 5，在本文中並分別以模組一、模組二、模組三稱之。每一圖共分四個視圖，分別為左上角的上視圖、右上角的三視圖 (view-point coordinates at (1, 1, 1))、左下角的前視圖、與右下角的右側視圖。由於 ANSYS 5.3 版對具圓形等曲線外形的模型無法用邊線 (edge) 方式完整的勾勒其外形，因此振形以元素方式呈現，並以隱藏線 (Hidden line) 方法將背面的元素遮蔽起來以利辨識。另外，未變形的橢圓球體則以面 (area) 型式繪製，並與振形重疊在一起以便比較。可惜的是有些弧形仍然無法連貫，也無法以其他線型 (如虛線等) 來取代，故有些重疊部份並不清晰。辨識不同方向振形的較佳方法則是參考圖 1 的各理論振形，再配合以下對各視圖的說明，如  $\phi_1$ 、 $\phi_2$  振形等，即可獲得更清楚的振形輪廓。

表 2 FEM 預測之彎曲模組頻率對長短軸比與質量比的關係、相對應的振形 (左為橢圓截面，右為圓截面)、與模組出現順序 (見於括弧內數字)。注意彎曲模組一與三皆為重複模組 (在圓截面上)，故括弧內相對應的模組數有兩個。

長短軸 比例 r	厚度比 t (質量比)	彎曲模組一	彎曲模組二	彎曲模組三
		(振形: s1, s2) Hz (mode #)	(振形: s2, s0) Hz (mode #)	(振形: s3, s1) Hz (mode #)
r=1.2	1/5(0.488)	995 (7, 8)	1152 (11)	1514 (16, 17)
	2/5(0.784)	1336 (7, 8)	1409 (11)	1699 (13, 14)
	3/5(0.936)	1756 (11, 14)	1705 (8)	1759 (12, 13)
	4/5(0.992)	2106 (13, 14)	1946 (10)	1767 (8, 9)
	5/5(1.000)	2164 (14, 16)	1980 (10)	1766 (8, 9)
r=1.4	1/5(0.488)	914 (7, 8)	1187 (11)	1389 (14, 15)
	2/5(0.784)	1312 (7, 8)	1417 (11)	1528 (13, 14)
	3/5(0.936)	1796 (13, 14)	1671 (10)	1572 (8, 9)
	4/5(0.992)	2186 (13, 14)	1858 (10)	1570 (8, 9)
	5/5(1.000)	2253(13, 14)	1887 (10)	1569 (8, 9)
	1/5(0.488)	855 (7, 8)	1189 (11)	1252 (12, 13)

r=1.6	2/5(0.784)	1279 (7, 8)	1397 (12)	1363 (9, 10)
	3/5(0.936)	1818 (13, 14)	1618 (10)	1395 (7, 8)
	4/5(0.992)	2251 (13, 14)	1763 (10)	1389 (7, 8)
	5/5(1.000)	2324 (13, 14)	1785 (10)	1387 (7, 8)
r=1.8	1/5(0.488)	796 (7, 8)	1178 (11)	1126 (9, 10)
	2/5(0.784)	1278 (9, 10)	1374 (12)	1221 (7, 8)
	3/5(0.936)	1838 (13, 14)	1558 (10)	1243 (7, 8)
	4/5(0.992)	2311 (14, 17)	1677 (10)	1237 (7, 8)
	5/5(1.000)	2393 (16, 17)	1693 (10)	1234 (7, 8)
r=2.0	1/5(0.488)	750 (7, 8)	1140 (12)	999 (9, 10)
	2/5(0.784)	1264 (10, 11)	1319 (12)	1077 (7, 8)
	3/5(0.936)	1848 (13, 14)	1479 (10)	1094 (7, 8)
	4/5(0.992)	2376 (16, 17)	1579 (10)	1086 (7, 8)
	5/5(1.000)	2458 (16, 17)	1592 (10)	1084 (7, 8)

圖 3 顯示第一模組的振形。該彎曲模組由橢圓截面觀之（上、前視圖）為反相位的  $\zeta_1$  振形，而由圓截面觀之（右側視圖）則為  $\zeta_2$  模組。本模組為短軸方向相對的二球面相互擠壓，迫使相臨的兩側球面同時向外膨脹。短軸所在的腹部振幅最大，同時長軸兩端點為節點。本模組也可以解釋為兩端固定的索之第一振形，節點在長軸端點。由表二資料可以看出這是較薄的中空體之基本模組（即第一個出現的非剛體彎曲模組），同時因為主要振動方向為圓形短軸截面所處的 yz 平面，所以也是二維重複模組（可由表二括弧內的模組數看出）。本模組表示當球體為中空的時候，此模組較易被激振。事實上，在本模組之後還有一彎曲模組，其對稱於短軸兩側的振幅相位相反，節點分別在長短軸端點上，但因為此模組常與其他模組頻率接近且節點恰在長短軸上，故本文未予討論。

圖 4 顯示第二模組的振形。該彎曲模組由橢圓截面觀之為  $\zeta_2$  振形，而由圓截面觀之則為  $\zeta_0$  模組。本模組為短軸圓周上各點同時向內擠壓，迫使長軸兩側向外膨脹，節點出現在長短軸端點連線之間的圓截面上（可由上、前視圖觀察），最大振幅出現在長軸端點。由表二資料可以看出本模組既非實心體的基本模組，也不是中空體的基本模組，變形方向也不集中在 yz 平面上，故不是二維重複模組。另外值得注意的是本模組多出現於另二個模組之間或緊接其後，顯示其重要性。當本模被激振時，長軸端點為極佳感測點。



圖 5 顯示第三模組的振形。該彎曲模組由橢圓截面觀之為  $S_3$  振形，而由圓截面觀之則為同相位移動的  $S_1$  模組。本模組為短軸上相對的二球面往同側移動，而長軸二側則同時往反方向移動。本模組與前二個模組稍有不同，可以解釋為具自由邊界條件的直索或直樑（端點為長軸端點）的第一自由彎曲振形，其主要振動方向在短軸所處的 yz 平面上。由表二資料可以看出這是實心體及長短軸比例較大時的基本模組，也是二維重複模組。本模組表示當球體為實心體或長軸較短軸長許多的時候，此模組較易被激振，因此可列為樑振形。節點方面，由上、前視圖觀之，可以看出有六個節點。短軸端點為極佳感測點，但長軸端點之位移因在切線方向，不利單軸加速規對法線方向之感測。

綜而言之，前述的三個彎曲模組中，無論是橢圓或圓形的截面皆出現圓環的振形，由  $S_0$  至  $S_3$  等，可見得具相似幾何的結構有類似的振形。值得注意的是，雖然長短軸截面振形的出現順序不同，模組的出現也與該橢圓球體的長短軸比例以及是否為實心體有關，但相關

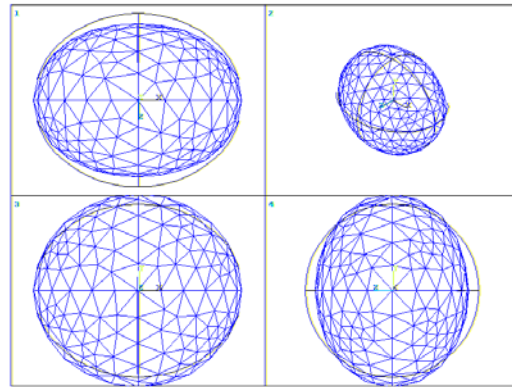


圖 3 橢圓球體彎曲模組一振形之四個視圖。本模組為短軸截面上相對曲面的反相位壓擠振形，節點在長軸端點。

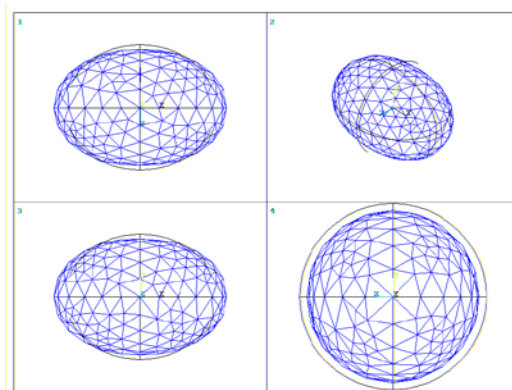


圖 4 橢圓球體彎曲模組二振形之四個視圖。本模組為短軸與長軸的反相壓擠振形，若由上、前視圖觀之，節點共有四處，約在長短軸端點連線中間附近。

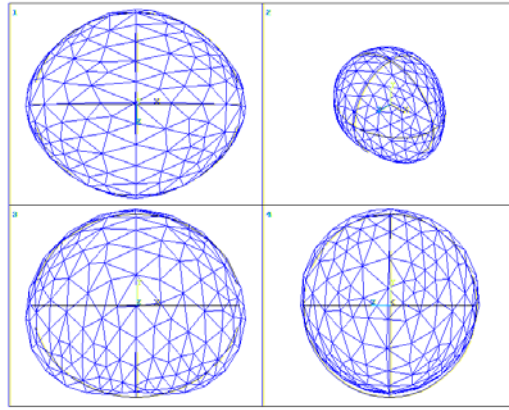


圖 5 橢圓球體彎曲模組三振形之四個視圖。本模組為長軸的自由樑第一彎曲振形，若由上、前視圖觀之，節點位置共有六處。

截面振形的搭配卻一致，例如圖 3 的  $s_1$  與  $s_2$ ，圖 4 的  $s_2$  與  $s_0$  等皆適用於本文中所有的例子，也說明其為整體振形的表徵，這樣的結果可以簡化許多的分析步驟。

### (二) 頻率分佈之分析

將表二的資料重新整理，並將三個模組的頻率變化以質量比（以實心體為參考質量）及長短軸比的函數分別繪製，得到圖 6、圖 7、及圖 8 三個立體圖，而部份的二維圖（頻率對質量比、頻率對長短軸比）也分別繪於圖 9 及圖 10 以供比較。由該三個三維圖可以觀察到對同一幾何外型的實心體與中空體而言，質量較大者（即厚度愈大者）的頻率皆有升高的趨勢，顯示長軸截面的強度隨截面積增加而增加。由頻率變化來看，模組一對質量變化（或說厚度）最靈敏，模組二次之，模組三則變化不大。以模組一而言，當球體愈接近實心體時，其變化速度明顯增快，尤其是長短軸比例較大時。但是對於模組二而言，球體愈接近實心體時，其變化速度雖也增快，但是長短軸比例較小的時後反而其變化量較大。模組三的頻率雖隨球體接近實心體而增加，但幅度不大，變化率也無明顯增減。

若從同一質量觀之，則模組一在接近空心體時，頻率隨長短軸比增加而逐漸降低；但當接近實心體時，頻率隨長短軸比增加而逐漸增加，這可能與長軸截面積的增加而使強度增加有關。然而無論頻率是增或是減，其變化都不算大。模組二在接近空心體時，頻率隨長短軸比增加而逐漸維持不變；但當接近實心體時，頻率隨長短軸比增加卻逐漸降低。對模組三而言，無論是實心或中空體，頻率皆隨長短軸比增加而降低，但愈接近實心體，下降幅度愈大。三個模組相較之下，模組三的頻率對長短軸比的變化較敏感，主因是其為自由樑的第一彎曲模組之故，因此樑愈長，頻率愈低。

### (三) 模組出現順序之分析

除了以上討論的振形與頻率外，本小節討論三個彎曲模組出現順序的變化，其中資料也取自表二。

由表二可以看出模組一為球體厚度最薄 ( $t=1/5$ ) 時的基本模組 (第 7、8 模組)，不論長短軸比為何；對於模組二而言，當長短軸比增加時頻率改變不多，出現順序也大約維持在第 10 模組與第 12 模組之間。相較之下，模組三就成為實心體的基本模組。即使在長短軸比為 1.2 的實心體中，因第 7 模組為扭轉模組，因此屬於模組三之第 8、9 模組仍為第一個出現的彎曲模組。綜合來說，隨厚度增加，模組一與模組三的角色逐漸相互置換。究其原因為實心體的截面強度遠大於薄空心體，故模組一在接近實心體時頻率急速升高。相對的，

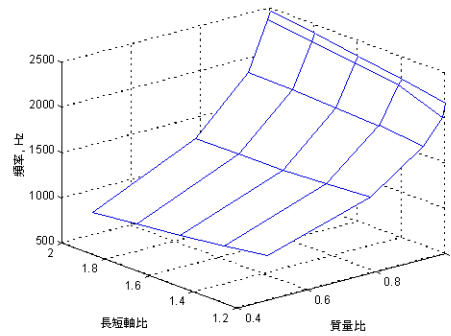


圖 6 彎曲模組一的頻率對質量比及長短軸比的關係圖。本圖顯示頻率隨質量比增加而上升，對長短軸比的變化雖較不敏感，但仍有不同的趨勢。

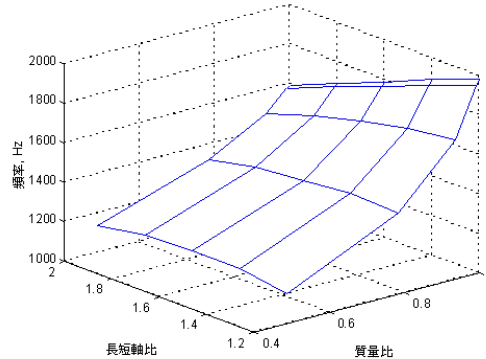


圖 7 彎曲模組二的頻率對質量比及長短軸比的關係圖。本圖顯示頻率對質量變化趨勢與模組一相似，但敏感度較低，同時本模組對長短軸比也不很敏感。

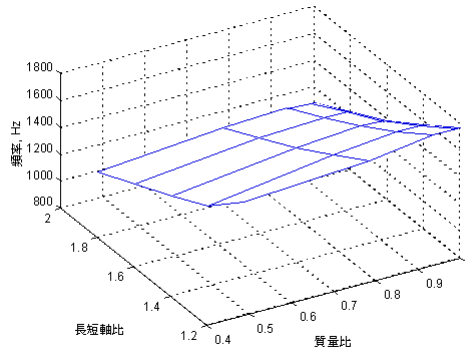


圖 8 彎曲模組三的頻率對質量比及長短軸比的關係圖。本圖顯示頻率隨長短軸比的降低而升高，但隨質量比之增

加而上升。

當長短軸比增加時橢圓截面類似樑結構且圓截面強度降低，因此原先屬於高頻的樑彎曲模組之頻率下降，導致模組三成為低頻之基本模組。

若僅就本文討論的三個彎曲模組的出現順序來討論的話，將表二資料重新整理繪製後可以更清楚說明其間的關係，如圖 9 及圖 10 所示。例如圖 9 顯示的是長短軸比為 1.2 至 1.8 時三個彎曲模組頻率與質量比的關係圖。由圖 9 可以清楚的觀察到在四個副圖裡模組一保持為最低頻的基本模組直至接近實心時因頻率上升過快成為第三個模組。模組二頻率維持穩定上升，因此維持第二或第三個出現的模組。模組三因頻率變化不大，因此在球體接近實心時躍升為第一模組。另一方面，模組二雖然並非基本模組，但其與模組一出現順序的更換與模組三相似。值得注意的是三個模組順序更迭的時機為質量比約介於 0.8 與 1 之間，隨長短軸比增加而稍微下降。三個模組之中以模組一對質量變化最為敏感，尤其是剛由實心體變為空心體時。由於本文中以厚度變化代表質量變化，則觀察模組一的頻率變化或是模組出現順序的更迭將有可能助於區別實心體與中空體，或是藉此推斷實心體內部是否有空隙產生。另一方面，圖 10 顯示質量比為 0.784 ( $t=2/5$ ) 至 1 ( $t=1$ ) 時三個彎曲模組頻率與長短軸比的關係。本圖中各副圖的差異性雖然較大，但皆顯示模組三對長短軸比的變化最為敏感，尤其當該比值增加時模組三即成為基本模組，同時各模組頻率之差異亦隨球體接近實心而增大。相對於模組三，模組一與模組二對長短軸的變化就較不敏感，尤其是長短軸比值較小的時候。

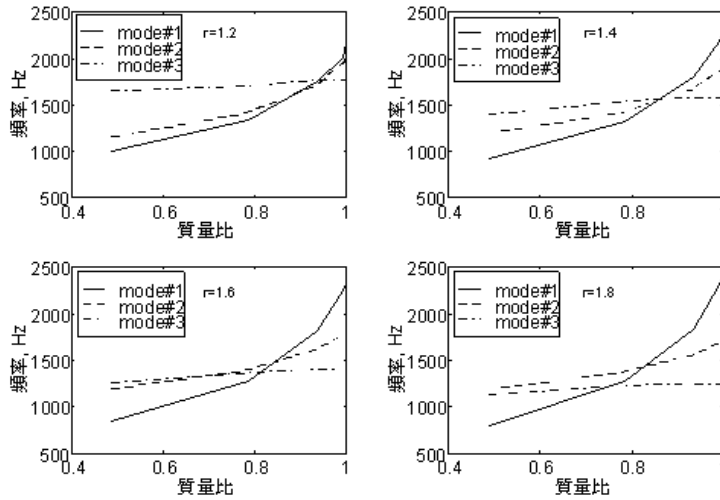


圖 9 長短軸比為 1.2 至 1.8 時三個彎曲模組頻率與質量比的關係圖，其中模組一最為敏感。

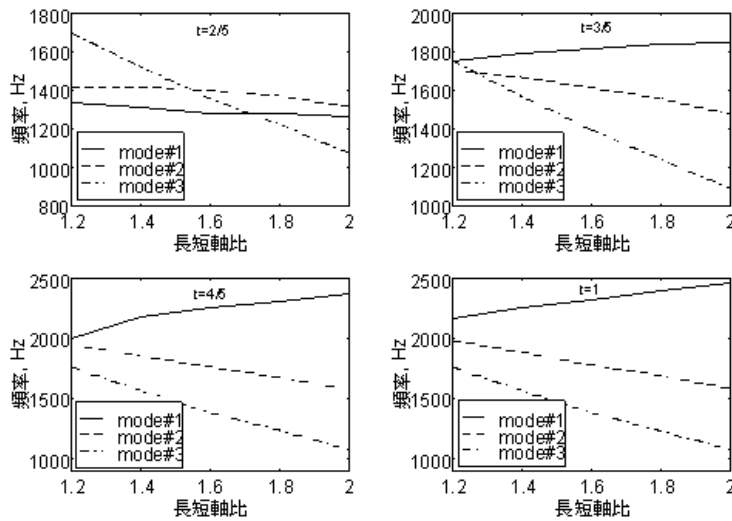


圖 10 質量比為 2/5 至 1 時三個彎曲模組頻率與長短軸比的關係圖。其中模組三最為敏感。

#### (四) 綜合分析

本節中的前三小節說明了橢圓球體三個低頻彎曲模組的各項特徵以及其對質量與長短軸比例的關係。基本上，模組一對質量變化最為敏感且為中空體的基本模組，而模組三對長短軸變化最為敏感且為實心體的基本模組，因此各模組的頻率分佈並非一成不變，而是與幾何形狀有關。

另一方面，模組的辨識必須依賴振形的判斷。以實用性觀點來考慮的話，完整的模態調查 (modal survey) 往往費時費力，因此如何以少數幾個感測器配合

適當的感測位置加以區別振形是很重要的。依據程 (1998) 對西瓜與洋香瓜進行模態分析的經驗顯示，模組三的頻率響應函數 (Frequency Response Function, FRF) 資料不易取得，因此辨識上較困難；反倒是另二個模組之 FRF 資料很完整，這可能是因為該二模組屬於球體表面 (在法線方向) 的彎曲振動，因此可以用單軸加速規清楚量取其振動反應。除此以外，假設同一品種或同一批貨品的幾何外形 (即長短軸比) 可大略維持相同比例的話，若欲區別實心體與中空體，或是藉以判斷其內部是否有不正常空隙存在，則以模組一與模組二出現順序的搭配會較以模組一與模組三搭配有效。這可以由圖 9 各副圖看出，當接近實心體時，模組二的頻率顯然較模組一為低；反之當遠離實心體時，模組二的頻率較模組一為高。同時，模組二與模組一出現順序 (由頻率觀察) 的交迭時機和模組三與模組一的交迭時機很接近，因此使用模組一與模組二區別實心體與中空體是可能的。不僅如此，由於二個模組的特徵很容易分辨，在實際的應用上僅使用數個感測器即可分辨其振形。例如將二個加速規置於短軸上相距夾角 90 度的位置，則於觀察 FRF 時，若二個 FRF 在同一模組的自然頻率上出現反相位，則為模組一；相反的，若出現同相位則為模組二。另一方法則是將二個加速規分別置於長短軸端點上，直接由頻譜 (Spectrum) 觀察。由於長軸端點為模組一的節點，因此第一個加速規 (置於長軸端點) 頻譜將不會出現模組一的峰點，但第二個加速規將同時出現二個峰點。至於模組三的辨識則可將二個加速規置於短軸上相距夾角 180 度的位置，若二個 FRF 在同一模組的自然頻率上出現反相位，則為模組三；若為同相位，則為模組一或模組二。由於上述的方法中僅使用二個加速規即可分辨振形，對於商品化所需的快速辨識將有助益。除了加速規以外，使用非接觸式的麥克風做為感測器也是可以的，但其雜訊較大。至於激振點，則選擇短軸上任意位置沿其表面法線方向加以激振即可同時獲得三個模組的振動反應。

#### 四、結論

本文以有限元素法模擬橢圓球體的彎曲振動模組與幾何性質，包括長短軸比例與中空體厚度 (或質量比例) 等，的關係。就振形而言，古典理論中的圓環振形皆出現在本文所探討的橢圓體三個彎曲模組中。雖然其出現順序與圓形不同，但與長短軸比例和中空體厚度 (或質量比例) 等皆有關。模組一為短軸截面 (yz 平面) 上相對曲面的反相位壓擠振形，節點在長軸端點；模組二為短軸與長軸的反相壓擠振形；而模組三為長軸的自由樑第一彎曲振形。同時，模組一與模組三皆為二維 (yz 平面) 重複模組。

以頻率分佈來看，得到的結果顯示模組一的頻率對厚度或質量比的變化最為敏感，而模組三對長短軸比的變化最為敏感。實心體與中空體的模組順序與頻率間的差別很明顯，利用本文所討論的三個彎曲模組可以很容易分辨出來。實心體的基本彎曲模組為模組三，而薄殼中空體的基本彎曲模組則為模組一。相較之下，雖然模組二的頻率變化不大，但就工程應用觀點來看，因其振形簡單且容易與模組一區分，因此可以取代模組三，並與模組一的頻率出現順序搭配來分辨實心體與中空體，其實用價值可能反較模組三為高。另外，本文雖未對薄

殼體與含裂縫之球體進行任何模擬分析，但本文研究的結果預料將有助於未來對此類問題的研究。

## 參考文獻

1. Timenshenko, S.P., D.H. Young, and W. Weaver, Jr., (1974), *Vibration Problems in Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, Inc., pp. 476.
2. Finney Jr., E.E., (1970), "Mechanical Resonance Within Red Delicious Apples and Its Relation to Fruit Texture", *Trans. of ASAE*, Vol. 13, pp. 177-180.
3. Yong, Y.C., and W.K. Bilanski, (1979), "Modes of Vibratoin of Spheroids at the First and Second Resonance Frequencies", *Trans. of ASAE*, Vol. 22, pp. 1463-1466.
4. Kimmel, E., K. Peleg, and S. Hinga, (1992), "Vibration Modes of Spheroidal Fruits", *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol. 52, pp. 201-213.
5. Huarng, L., P. Chen, and S. Upadhyaya, (1993), "Determination of Acoustic Vibration Modes in Apples", *Trans. of ASAE*, Vol. 36, No. 5, pp. 1423-1429.
6. Chen, H., and J. De Baerdemaeker, (1993), "Finite-Element-Based Modal Analysis of Fruit Firmness", *Trans. of ASAE*, Vol. 36, No. 6, pp. 1827-1833.
7. 程安邦, (1998), "Experimental Modal Analysis on Melons of Ellipsoidal Shapes", 第22屆全國力學會議論文集, Vol. 3, pp. 493-500.
8. ANSYS 5.3 User' s Guide, 1996, ANSYS, Inc.. Houston, PA.

88年1月11日 收稿

88年3月6日 接受