

ANSYS 應用於旋轉圓盤之振動分析

徐碧生¹ 蔡杰修²

1. 國立宜蘭技術學院機械工程系副教授
2. 國立宜蘭技術學院機械工程系畢業生

摘 要

本研究主要是利用 ANSYS 分析旋轉圓盤的自由振動，探討的主題可分為三部份：（1）無任何點拘束的自然振動分析，（2）受到剛性點支承的自然振動分析，（3）受到圓周線支承的自然振動分析。文中首先介紹利用 ANSYS 建構圓盤模型，並探討其收斂性以便使用最為經濟之模型。然後將分析所得的自然頻率和文獻上的理論值做比較，分析結果顯示，在沒有旋轉時，ANSYS 的結果和理論值極為接近，但加入旋轉後，由於 ANSYS 僅係將旋轉效應以預應力（pre-stress）的方式，加入到模型中，故僅增強了結構的強度，造成了系統自然頻率的提昇，但並未有一般文獻中頻率分歧(bifucation)的現象產生，此為 ANSYS 軟體尚待努力之處。但不可諱言，ANSYS 已是一極易上手，且準確度即高的工程分析軟體。

關鍵詞：振動、圓盤、有限元素法、ANSYS

Vibration Analysis of a Spinning Annular Plate With ANSYS

Bih-Sheng Hsu¹ and Jie-Shiou Tsai²

1. Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, National Ilan Institute of Technology

2. Graduate, Department of Mechanical Engineering, National Ilan Institute of Technology

Abstract

An analysis of the free vibration of a spinning annular plate with (1) no interior constrains (2) interior rigid point supports (3) grounded circular line guides is presented in this study. The finite element models were created with the FEM software ANSYS and the convergence on the number of elements are studied first. Numerical results obtained are compared with the theoretical results presented in the literatures. Good agreements are found in the most cases, However, due to the fact that the Coriolis acceleration are not considered in the ANSYS, the phenomenon of the bifurcation of natural frequencies is absent in the numerical results. Even though, the ANSYS has become a popular CAE software with high accuracy and is applied in engineering widely.

Key Words : Vibrations, Rotating Disk, Finite Element, ANSYS

一、前言

旋轉圓盤的動態特性不論在理論上或工程上，長久以來一直是為人所關注的主題，起因於它被廣泛的應用於工業界中。傳統的應用領域包括圓鋸(circular saw)、渦輪轉子(turbine rotor)及飛輪(flywheel)等。近年來由於轉速的不斷提高，使得因旋轉產生的振動問題易形重要。同時由於電腦的快速發展，讀寫及儲存裝置的大量應用更引起人們對繞性旋轉圓盤動態特性的高度重視。

目前在工程應用上旋轉圓盤的動態特性解析方法，大多以數值解析(近似解)為主，理論解(exact solution)並不多見。且由於現在電腦運算速度和容量的大幅提昇，工程和科學應用的電腦輔助分析、設計等套裝軟體，功能日益強大，且對實體模型的模擬與分析相當便利，所以本研究將使用有限元素套裝軟體 ANSYS 作為本研究的工具軟體，建立 ANSYS 套裝軟體的分析模組，如此可降低分析的成本和所花費的時程。

二、圓盤振動之解析

(一) 圓盤之尺寸

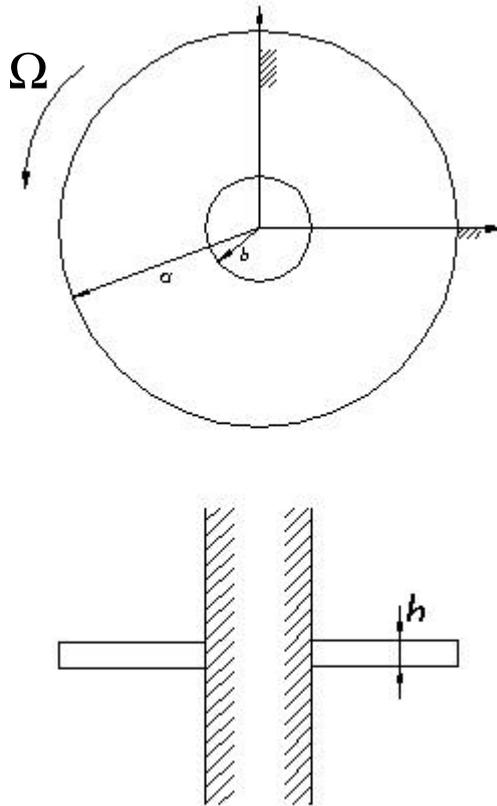


圖 1 內側為固定端，外側為自由端之旋轉圓盤

表 1 圓盤之材料性質和幾何參數

楊式係數 E (N/m^2)	密度 (Ns^2/m^4)	卜松氏比
2.06×10^{11}	7850	0.3
圓盤外徑 a	圓盤內徑 b	圓盤厚度 h
80mm	24mm	1mm

圖 1 所示為一無任何拘束的圓盤，內側為完全固定端(clamped)，外側為自由端(free)。其中 a 和 b 分別代表外半徑和內半徑， h 為圓板厚度且 $h < a$ ， Ω 為圓盤轉速。圓盤材料具等向性(isotropic)，而且我們探討的主題為圓盤

的橫向振動(transverse vibration)。表 1 為圓盤之材料性質和幾何參數。由於圓盤的理論公式可參考文獻[1,2]，本文僅針對如何建立有限元素模型加以說明。

(二) 利用有限元素法建構圓盤模型

本文利用 ANSYS 中的殼元素 (shell element) 63[3,4] 來架構元素模型，SHELL 63 ELEMENT 之特性為每個元素有四個節點，每個節點有六個自由度： u, v, w 分別代表 x, y, z 方向之位移、 q_x, q_y, q_z 分別代表 x, y, z 方向之角度，所需之材料性質為：楊式係數、卜松氏比、密度，物理性質為：厚度、彈性基座勁度。

圓盤模型架構方法：以卡式座標利用面積 (Area) 架構成一圓形結構，然後將結構網格化後有 480 個 nodal, 432 個 element，如圖 2 所示。

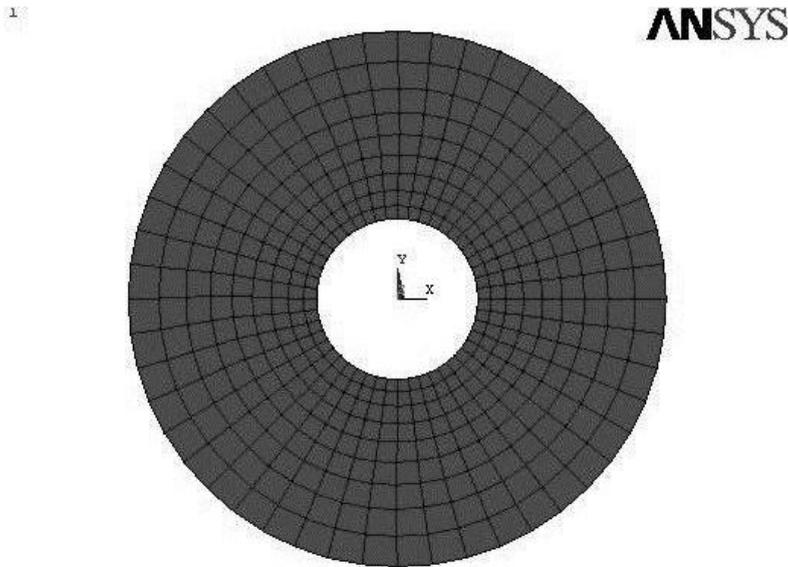


圖 2 環狀薄圓盤分割節點圖

三、結果與討論

(一) 元素大小收斂性分析

本研究作振動分析時，為求得分析準確性及避免浪費不必要的時間，首先以元素大小收斂性分析求得恰當的元素尺寸，元素大小收斂性分析可以使分析過程求得一分析近似解且不浪費多餘時間，分別分割 24 element、48 element、80 element、120 element、168 element、192 element、216 element、320 element、352 element、432 element、476 element 等作元素尺寸收斂性分析，由圖 3 可判斷出元素尺寸於 432 element 時，所求得之自然頻率已相當精確且收斂，所以本研究皆採取 432 element 作分析，以避免元素過細造成過多之不必要元素，以節省分析時間。

(二) 靜態圓盤的自然頻率分析

首先分析當圓盤沒有旋轉時的自然振動頻率，我們將它分為三部份來分析：(1) 無任何點拘束的自然振動頻率、(2) 受到剛性點支承的自然振動頻率、(3) 受到圓周線支承的自然振動頻率。而圓盤的邊界條件為圓盤內側完全固定端(clamped)，外側為自由端(free)。

分析過程是以 ANSYS 中的 Reduced 方法求解，因為所考慮的圓盤振動方向只有 Z 方向，所以主自由度的設定只設定 UZ 方向，而求解出來的頻率數值的單位為赫茲，但是我們所參考的文獻理論值[1]所使用的頻率單位為一無因次的單位，所以我們必須將頻率 f 換算成 ω 。換算公式分別為 $f = \omega / 2\pi$ 及 $\omega = 2\pi f$ 。($h = a/D$)^{1/2}

(1) 首先進行無任何點拘束的非旋轉圓盤之自然振動頻率分析，經過分析後所得頻率和理論值比較如表 2 所示。由表中發現，ANSYS 的準確度極高，與理論值之最大誤差僅 1.27%。

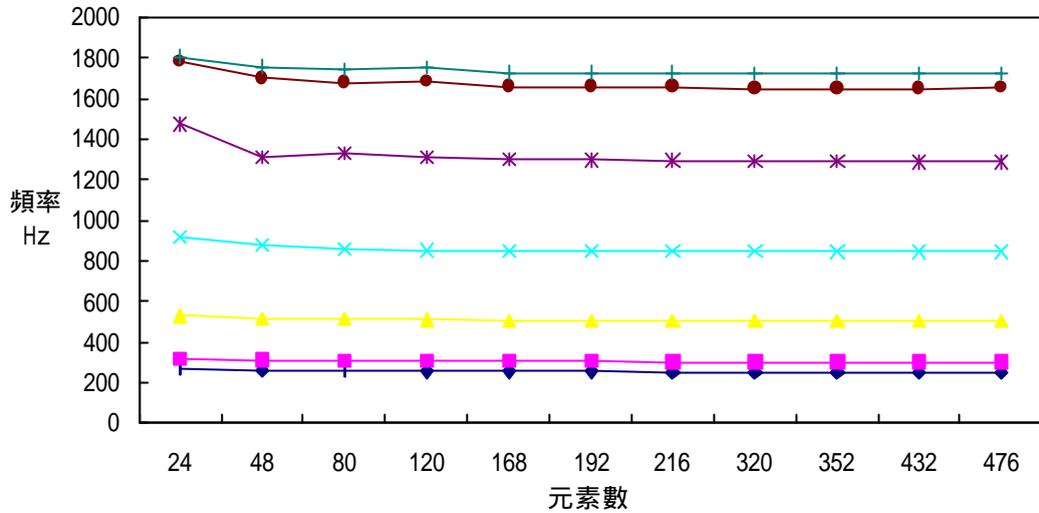


圖 3 元素分割數之收斂圖

表 2 無任何點拘束之靜態圓盤的自然頻率值

M	N	ANSYS 分析值 (Hz)	ANSYS 分析值 (°)	理論值	誤差值 (%)
0	1	252.31	6.55	6.55	0
0	0	257.82	6.69	6.66	0.45
0	2	302.91	7.86	7.96	1.27
0	3	505.73	13.12	13.28	1.22
1	0	1649.3	42.78	42.62	0.37
1	1	1721.9	44.67	44.64	0.067
1	2	1952	50.64	50.96	0.63
1	3	2363.8	61.32	62.09	0.38

(2) 接著分析具有剛性點支承的非旋轉圓盤之自然頻率，而在這部份我們分別給圓盤一到四個剛性點支承，在這些剛性支承點我們給它的自由度也是 UZ 方向，並作各別的分析。這些剛性點支承之徑向位置在 r=66mm 處，除單一點支承外其餘均為對稱分佈。表 3 為具單一點支承之自然頻率值，結果顯示 ANSYS 之分析結果與理論值之誤差均在 4% 以下。

表 3 具單一點支承之靜態圓盤的自然頻率值

ANSYS 分析值 (Hz)	ANSYS 分析值 (°)	理論值	誤差值 (%)
252.31	6.55	6.62	1.06
255.87	6.64	6.67	0.45
283.35	7.35	7.49	1.90
302.94	7.86	8.04	2.29
443.63	11.51	11.78	2.34
505.74	13.12	13.32	1.52
745.66	19.34	20.03	3.56
844.45	21.91	22.41	2.28

接著點支承數為 2 至 4，兩個點支承為對稱配置，三個點支承為均勻分佈，四個點支承亦為對稱配置，所分析出

的自然振動頻率其中凡未受點支承影響的自然振動頻率均未表示出，結果分別如表 4、表 5 和表 6 所示。

表 4 具兩個點支承之靜態圓盤的自然頻率值

ANSYS 分析值 (Hz)	ANSYS 分析值 (°)	理論值	誤差值 (%)
273.29	7.09	7.17	1.12
392.58	10.18	10.45	2.65
657.18	17.05	17.83	4.57

表 5 具三個點支承之靜態圓盤的自然頻率值

ANSYS 分析值 (Hz)	ANSYS 分析值 (°)	理論值	誤差值 (%)
278.19	7.22	7.36	1.94
355.70	9.23	9.44	2.28
673.03	17.46	18.28	4.70

表 6 具四個點支承之靜態圓盤的自然頻率值

ANSYS 分析值 (Hz)	ANSYS 分析值 (°)	理論值	誤差值 (%)
392.13	10.17	10.45	2.75
516.94	13.41	14.11	5.22
1036.6	26.89	28.97	7.73

(3) 最後分析具有圓周線支承之非旋轉圓盤的自然振動頻率，在這部份我們將圓盤的整個圓周線加上支承，每個支承也都為剛性支承，支承的徑向位置 $r=66\text{mm}$ ，而自由度也都只有定義 UZ 方向，來做自然振動頻率之分析。分析所得之自然振動頻率如表 7 所示。

表 7 具圓周線支承之靜態圓盤的自然振動頻率值

M	N	ANSYS 分析值 (Hz)	ANSYS 分析值 (°)	理論值	誤差值 (%)
0	0	1586.3	41.15	41.2	0.12
0	1	1656.5	42.97	43.1	0.93
0	2	1882.7	48.84	48.9	0.12
0	3	2303.2	59.74	58.4	2.24

從表 2 到表 7 的自然頻率比對，我們可以發現利用 ANSYS 所分析出來的自然頻率和文獻[3,4]的理論值已非常的相近，誤差值已非常的小，顯示了 ANSYS 軟體已具有相當之正確性，而且以 ANSYS 建構有限元素模型極為方便，將可大量應用於工程分析上。

(三) 靜態圓盤的自然模態

接著將 ANSYS 所分析出來的單一點支承(支承位置在 x 軸上， $r=66\text{mm}$ 處)的前四個模態圖(最低頻率的四個)，如圖 4，和圓周線支承(支承位置在 $r=66\text{mm}$ 處)的前四個模態圖，如圖 5，與文獻[1]上的模態圖做比較，雖然兩者的模態圖表達的方式不同(一個是用線等高，本文則用同色等高的方式)，但是仍可發現二者的模態非常的相近。

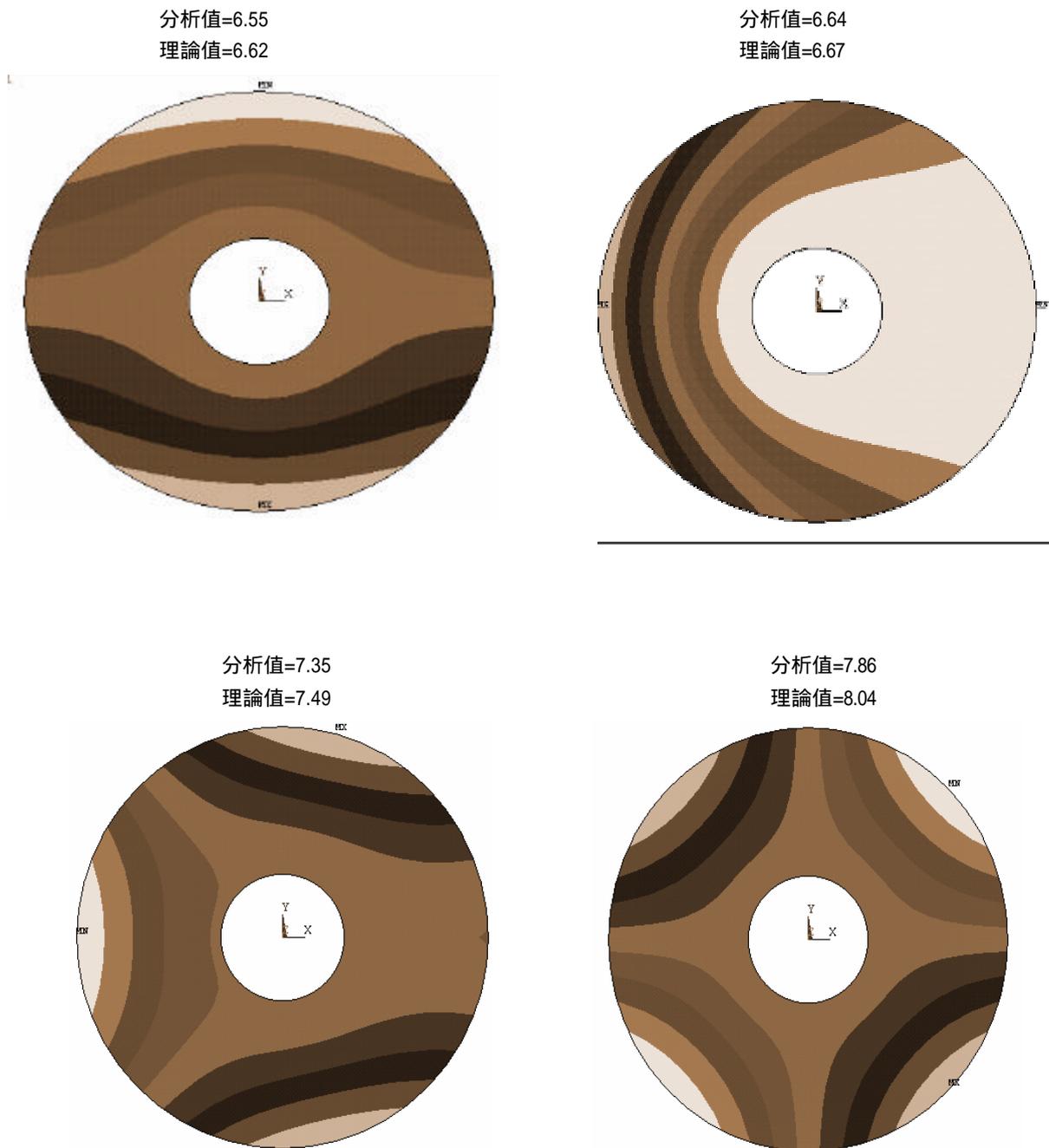


圖 4 具單一點支承之靜態圓盤的自然模態圖

觀察圖 4 中各模態時需注意的是，因為各模態均為獨立繪製，因此相同的顏色在不同的模態圖中並不代表相同之變形量，僅有在同一模態圖中才代表相同之變形量。同時由剛性點支承位置(x 軸上, $r=66\text{mm}$)及圓盤內側之變形量均為零，可研判此模態圖之正確性。

分析值=41.15

分析值=42.97

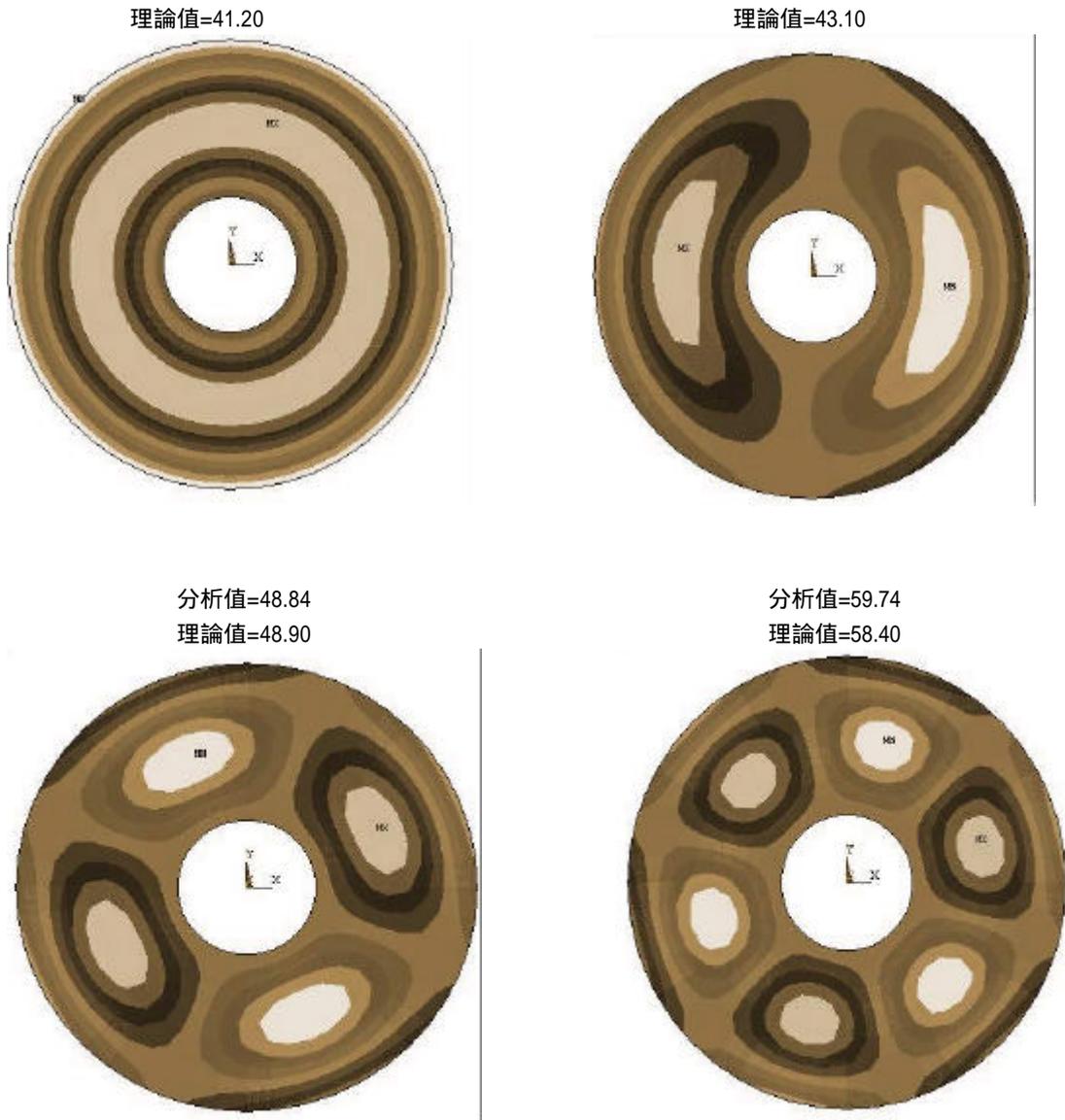


圖 5 具圓周線支承之靜態圓盤的自然模態圖

(四) 旋轉圓盤的自然頻率分析

(1) 無任何拘束時的旋轉圓盤自然頻率

ANSYS 在分析旋轉問題時，係考慮圓盤在旋轉狀態下會使圓盤產生圓周向的應力，也就是結構之預應力，旋轉的效應會使得結構之剛性增加；因此在 ANSYS 的分析過程中考慮到預應力的因素，即採取預負載模態分析。分析結果中發現圓盤因旋轉效應，使得圓盤剛性的增加，自然頻率便隨著轉速的提升而增加，但其圓盤的模態的順序和形式並不會因此而改變，也不會有新的頻率產生。而為了與文獻上的理論值相比較，我們將圓盤之轉速轉換為無因次轉速 ω^* ，其轉換公式為 $\omega^* = \omega \cdot (h a / D)^{1/2}$ 。

若考慮科氏加速度(Coriolis acceleration)的影響，旋轉效應將會造成自然頻率分歧(bifurcation)現象產生[5]，意即科氏加速度會使得原有靜態下之振模(mode)由一個變為兩個，一個為前向模態(forward mode)，另一個為逆向模態(backward mode)。然而 ANSYS 僅考慮旋轉產生預應力，所以本文中僅與前向模態之頻率比較之。

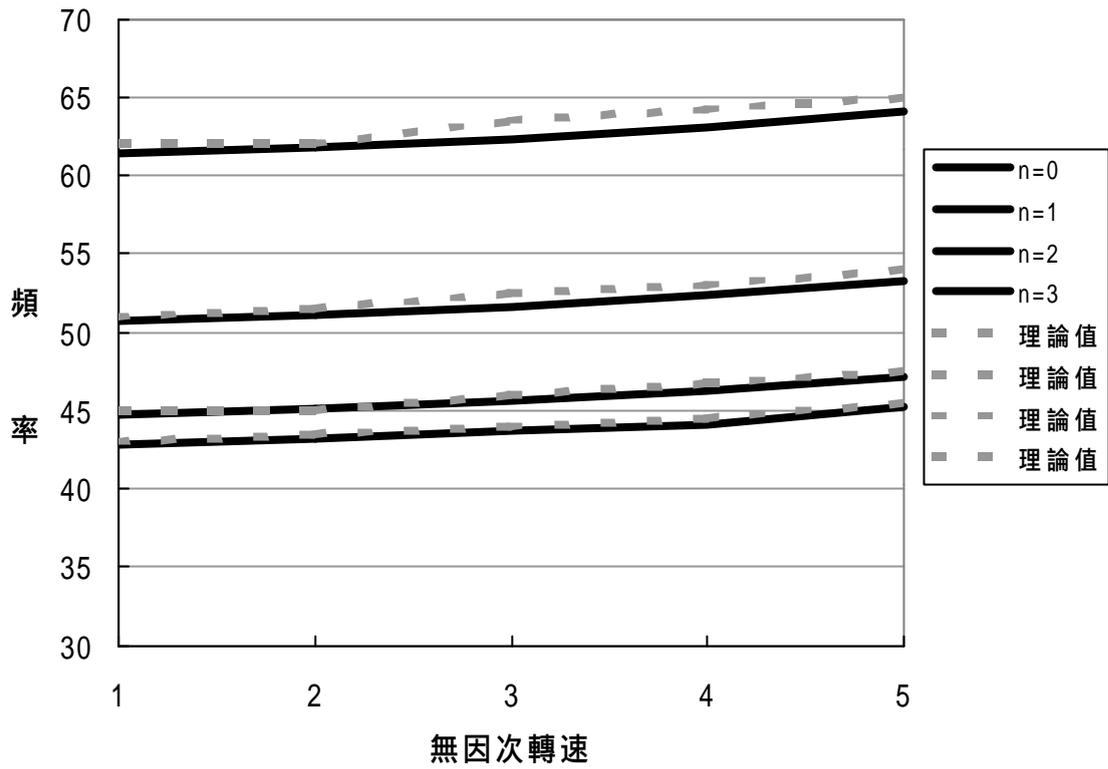


圖 6 (m=1) 旋轉圓盤分析理論轉速比對圖

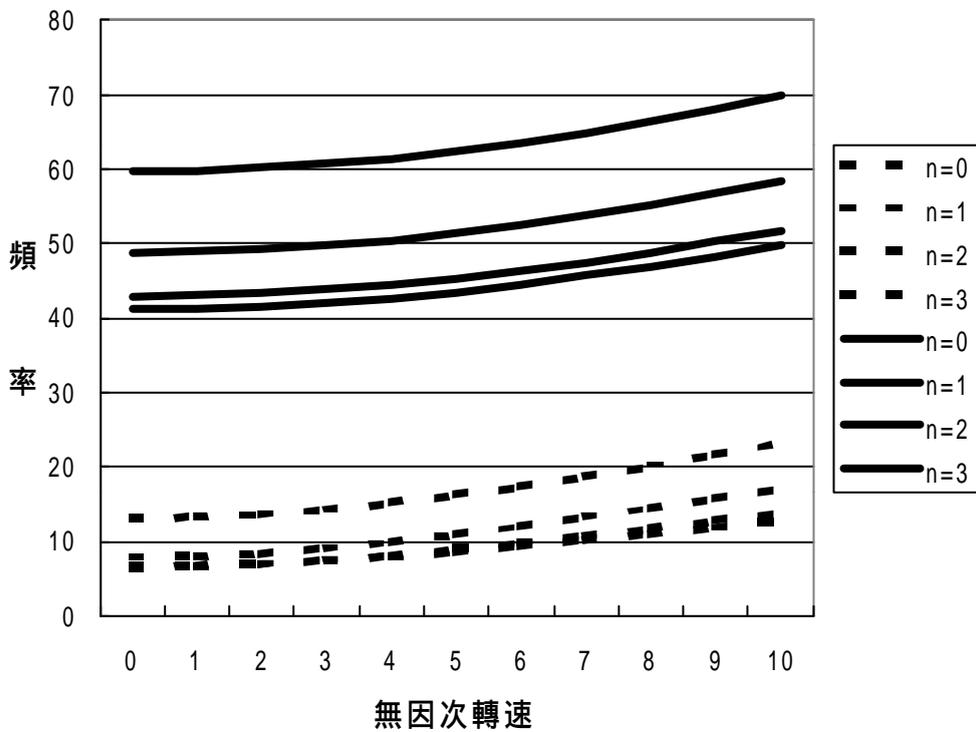


圖 7 (m=0) 具單一圓周線支承旋轉圓盤頻率變化圖

圖 6 中縱軸為無因次化頻率，橫軸為無因次化轉速，粗黑線為 ANSYS 分析所得的自然頻率，虛線為理論值自然頻率，二者皆因轉速提升而增加並幾乎在同一條線上，此證明了旋轉效應對於圓盤的作用。

(2)受圓周線支承的旋轉圓盤自然頻率變化情形

本節將呈現受剛性圓周線支承對旋轉圓盤所造成的影響。為了易於分辨，圖 7 中只繪出受影響 $m=0$ 頻率(實線部份)，而虛線部份則為原有自然頻率。由圖中可看出，因加了圓周線支承，皆比原有自然頻率來得高，可提昇至 $m=1$ 的頻率數值，而原本 $m=1$ 的頻率數值將提昇至 $m=2$ 的頻率數值。

四、結論

本研究經由分析結果及理論值比對符合之後，已經確信旋轉圓盤之動態分析可利用分析軟體 ANSYS 得到極為準確的結果。文中首先進行了靜態圓盤自由振動分析，然後再以旋轉圓盤受(1)剛性點支承(2)圓周線支承影響下之動態特性。總結以上所有的分析，提出下列幾點結論：

- (一) 對於旋轉圓盤之自然振動頻率分析而言，由於旋轉效應的離心力作用，會使圓盤結構強度及自然振動頻率的增加。利用 ANSYS 軟體分析之結果不僅得到自然振動頻率，其振動模態的變化亦可觀察。
- (二) 圓盤受到單一剛性點支承時，會開始產生分歧現象，但原有之自然頻率不受其影響。此分歧現象代表著圓盤本身會調整模態節線波型之方位，使得原有之自然模態不受其影響。
- (三) 旋轉圓盤受一剛性點支承時，因旋轉效應使得自然頻率有逐漸上升之作用。
- (四) 對旋轉圓盤而言，圓周線支承比剛性拘束點更顯著地提高其新的固有頻率，並且使得 $m=0$ 的模態強制成為 $m=1$ ， $m=1$ 的模態強制成為 $m=2$ 。
- (五) ANSYS 將旋轉效應以預應力 (pre-stress) 的方式，加入到模型中，增強了結構的強度，造成了系統自然頻率的提昇，但並未有頻率分歧的現象產生。

五、參考文獻

1. S. C. Huang and B. S. Hsu (1992), "Theory of Receptance Applied to Modal Analysis of a Spinning Disk with Interior Multi-point Supports", Journal of Vibration and Acoustics, Transaction of ASME, Vol. 114, pp468-476.
2. S. C. Huang and B. S. Hsu (1993), "Vibrations of a Spinning Annular Plate with Multi-circular Line Guides", Journal of Sound and Vibration, Vol. 164, No. 3, pp535-547.
3. 蔡國忠、陳精一 (2000)，電腦輔助工程分析—ANSYS 使用指南，全華科技圖書公司，台北
4. 謝忠祐、賴育良、林啟豪 (1998)，ANSYS 電腦輔助工程分析，儒林圖書公司，台北
5. S. C. Huang (1988), "Effects of Coriolis Acceleration on the Vibrations of Spinning Structures," Ph. D. Dissertation, Purdue University.

91 年 09 月 16 日投稿

91 年 09 月 26 日接受

