

計算題 每題 20 分

一、求下列微分方程式之通解(General Solution)

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{2e^{-2x}}{x^2}$$

二、請以拉普拉斯轉換(Laplace Transform)方法求解初始問題(Initial Value Problem)

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

其中 δ 為 Dirac delta function (or called unit impulse function)

三、請問週期為 2π 之週期函數 $f(x)$ 之傅利葉轉換(Fourier Transform)為何?

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < -0.5\pi \\ 0, & -0.5\pi < x < 0.5\pi \\ 1, & 0.5\pi < x < \pi \end{cases}$$

四、計算 $\operatorname{div} \vec{v} = ?$

$$\vec{v} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

五、請計算函數 f 在點 $P(1, \pi)$ 、沿 \vec{a} 方向的方向導函數 $D_{\vec{a}}f$

$$f = e^x \cos y$$

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$