一、對於一個定義於正實軸($t \geq 0$)的實數值函數 $g(t)$，可以定義此函數之富利葉轉換(Fourier Transform) $\hat{g}(f)$ 為

$$\hat{g}(f) \equiv \int_0^{\infty} g(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} f t} dt$$

$\hat{g}(f)$ 為定義於整個實軸(即 f 為任意實數)的複數值函數。

請依據此定義回答以下問題：

a　證明：對於任意實數 f，請證明 $\hat{g}(f)+\hat{g}(-f)$ 的虛數部份為零。(10%)

b　求出 $p(t)=e^{-2(t-3)}$ 的富利葉轉換 $\hat{p}(f)$。(10%)

c　求出 $r(t)=e^{-t^2}$ 的富利葉轉換 $\hat{r}(f)$。(13%)

二、PDE ： $\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$

B.C. $U(0,t)=0, U(1,t)=1$

I.C. $U(x,0)=\begin{cases} 2x, 0<x<\frac{1}{2} \\ 1, \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$

a　解出 $U(x,t)$，並寫出其展開式至前三項。(30%)

b　試問當 t 趨近於無限大時，U 應為何？(4%)

三、 4^{th} order ODE ： $\dfrac{d^4 y}{dx^4}+y=0$ ，

a　解出其 general solution。(23%)

b　試舉出一實務例解釋其物理意義。(10%)