

一、請求出下列極限值：

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2xe^{-x}$  (5 分)

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$  (5 分)

二、請求出下列積分：

1.  $\int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$  (5 分)

2.  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$  (5 分)

三、函數  $f(x)=|x-2|+3$ ，在  $x=2$  時是否具連續性？又是否具可微性？ (8 分)

又函數  $g(x)=\begin{cases} ax+b & \text{當 } x \leq 2 \\ x^2 & \text{當 } x > 2 \end{cases}$ ，若  $x=2$  時， $g(x)$  具可微性，則  $a$  和  $b$  為何？ (8 分)

四、設函數  $f(x)=x^3-4x^2+6x-4$ ，若  $x \in [0, 4]$ ，則請求出在  $(0, 4)$  內的  $k$  值，使之滿足均值定理(Mean-Value Theorem)。 (8 分)

又設函數  $g(x)=x^2+2x$  在  $[-2, 2]$  內連續，現若存在  $k \in [-2, 2]$ ，則請求出  $k$  值，使之滿足積分均值定理(Mean-Value Theorem for Integrals)。 (8 分)

五、設兩商品 A 和 B 價格和產量間的關係為  $P_A=1-Q_A$  與  $P_B=1-Q_B$ ，現已知收益函數和成本函數分別為

$$R(A, B)=P_A Q_A + P_B Q_B \text{ 且 } C(A, B)=Q_A Q_B$$

令利潤函數  $\pi(A, B)=R(A, B)-C(A, B)$ ，請求出其之相對極值。 (8 分)

若令  $2Q_A+4Q_B=1$ ，則利潤函數  $\pi(A, B)$  在此限制下，其相對極值又為何？ (8 分)

六、令函數  $\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$  其中  $n>0$ ，則

1. 試證明  $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$  (8 分)

2. 現若已知  $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ，則  $\Gamma(\frac{9}{2})=?$  (8 分)

七、請求出  $y^2=8x$ ， $y^2=24-4x$  與  $y=0$  所圍成的區域面積。 (8 分)

八、若有一方程式  $F(x, y, z)=0$ ，且定義三個變數中之每一個變數為另兩個變數的

函數，若所有的導數皆存在，則請求  $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z}$  的值。 (8 分)